Tel. 388/9837745

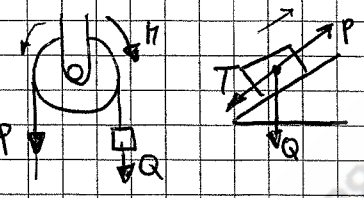
MASTER COPY

CAP. 1 MACCHINE E MECCANISMI

Col termine macchina si intende un qualsiasi sistema in grado di trasformare energia. C'è un'energia entrante e un'energia uscente. Se l'energia uscente è meccanica la macchina è detta motrice; se l'energia entrante è di tipo meccanico ~~la~~ la macchina si dice operatrice. Tutte e due possono essere en. meccaniche. Una macchina è composta da un insieme di elementi collegati tra loro che consentono la trasmissione di energia (o meglio di forze e di momenti) quando di lavoro. Spesso si ~~si~~ considera l'aspetto cinematico, si parla di meccanismo.

Gli elementi che costituiscono una macchina sono collegati tra loro in zone di contatto che hanno dimensioni molto inferiori rispetto all'ingombro degli elementi. Queste zone sono dette coppie cinematiche. Esse possono consentire al più 2 vincoli nel piano e 5 nello spazio, altrimenti si chiudono collegamenti rigidi. Le coppie cinematiche sono essere rigide o non rigide; cedevoli o non cedevoli. Una coppia cinematica rigida e cedevole è detta elementare. Le tre coppie elementari più importanti sono la cinematica, la rotaxoide e l'elicoidale. Coppie non rigide e/o non cedevoli si dicono coppie superiori. Nel piano un meccanismo ha N gradi di libertà con $N \geq 3(m-1) - 2m_2 - m_1$ mentre nello spazio $N \geq 6(m-1) - 5m_5 - 4m_4 - 3m_3 - 2m_2 - m_1$.

Solitamente una macchina è soggetta a forze/momenti motrici e a forze/momenti resistenti (queste sostituibili in attive o passive). Consideriamo due esempi:



- il lavoro motore è compiuto dalla forza P ed è calcolabile come il prodotto scalare della forza P per lo spostamento del suo punto di applicazione
- il lavoro resistente utile è compiuto dalla forza Q ~~del~~ ed è calcolabile come sopra. È negativo
- il lavoro resistente passivo è compiuto dalla forza T e dal momento M. È negativo

Possiamo scrivere l'equazione di bilancio energetico: $L_m + L_r + L_p = \Delta E$

$L_m - |L_r| - |L_p| = \Delta E$

Il rendimento è la capacità di trasformare il lavoro motore in lavoro utile $\eta = \frac{|L_r|}{L_m}$

Se consideriamo la condizione di regime (in cui si suppone nulla la variazione di velocità) quindi $\Delta E = 0$)

$L_m - |L_r| - |L_p| = 0$

$|L_r| = L_m - |L_p|$

$\eta = \frac{L_m - |L_p|}{L_m} = 1 - \frac{|L_p|}{L_m}$

Nel caso in cui non ci sia attrito $|L_p| = 0$, quindi $L_{m0} - |L_r| = 0$ $|L_r| = L_{m0}$

$\eta = \frac{L_{m0}}{L_m}$

Ma essendo $L_{m0} = P_0 \cdot s$ e $L_m = P \cdot s$ ottengo $\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{M_0}{M}$

Si parla invece di moto retrogrado quando la macchina inizia a funzionare in senso opposto a quello di ordine previsto, a causa di una variazione delle grandezze motrici. Se P diminuisce, avrò una forza $P' < P$, ed ora la forza Q del moto diretto diventa forza motrice $L_m' = |L_r|$

$\eta' = \frac{L_r'}{L_m'} = \frac{L_r'}{|L_r|} = \frac{L_r'}{|L_{m0}|} = \frac{P'}{P_0}$

Il moto retrogrado è possibile se $\eta \geq \frac{K}{K+1}$ con $K = \frac{L_p'}{L_p}$

Nelle macchine collegate in serie il rendimento si calcola come il prodotto di tutti i singoli rendimenti

$\eta_{TOT} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_m$

Nelle macchine collegate in parallelo il rendimento si calcola come media pesata dei singoli rendimenti pesata con i lavori motori

$$\eta_{TOT} = \frac{\eta_1 L_{m1} + \eta_2 L_{m2} + \ldots + \eta_m L_{mm}}{\sum L_{mi}}$$

CAP. 2 CINEMATICA

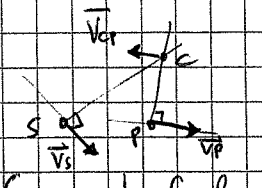
Velocità

Dati due punti S e P con V_S e V_P, la velocità relativa di S rispetto P è $\vec{V}_{SP} = \vec{V}_S - \vec{V}_P$

quindi $\vec{V}_S = \vec{V}_P + \vec{V}_{SP}$

La relazione fondamentale della cinematica è $\vec{V}_S = \vec{V}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{PS}$ cioè la velocità di un punto S è pari alla velocità di un altro punto P sommata alla velocità che il punto S ha nella rotazione attorno al punto P.

Esiste un punto, il centro delle velocità, che ha velocità nulla



$\vec{V}_{CP} = \vec{V}_C - \vec{V}_P = 0 - \vec{V}_P = -\vec{V}_P$

Conoscendo il modulo di $\vec{V}_P$ è facile trovare C. Basta trovare quel punto che ha velocità // a $\vec{V}_P$ ma con verso opposto a $\vec{V}_P$

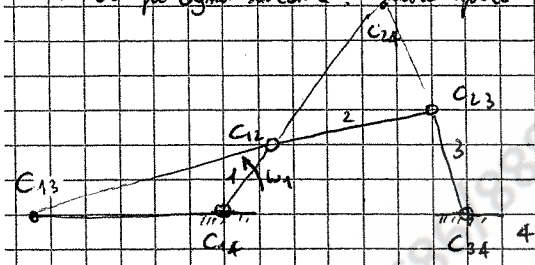
Se invece conosco le direzioni delle velocità di due punti, il punto C è determinato dal punto di intersezione delle normali alle due direzioni.

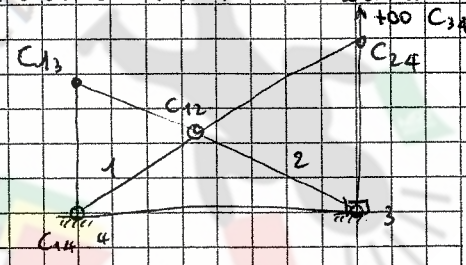
Conoscendo C la relazione fondamentale della cinematica diventa $\vec{V}_S = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CS} = \vec{\omega} \wedge \vec{CS}$

Questo significa che il campo delle velocità di un punto è generato dalla rotazione attorno al punto C.

C'è da notare che il punto C appartiene al corpo e può essere centro delle velocità solo in un determinato istante.

Se invece consideriamo il punto geometrico che in ogni istante coincide con C, allora la relazione $\vec{V}_S = \vec{\omega} \wedge \vec{CS}$ è valida in ogni istante. Questo punto geometrico è detto centro di istantanea rotazione.



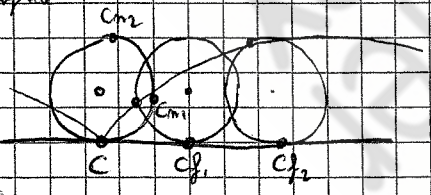


MASTER COPY
Tel. 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\overline{C_{14}C_{12}} \cdot \omega_1 = \overline{C_{24}C_{12}} \cdot \omega_2$

e trovo ω_2

Il centro delle velocità in pratica diventa il moto osservando la polare fissa (rispetto a un riferimento fisso) e la polare mobile (rispetto ad un riferimento solidale col corpo). Le due polari rotolano senza strisciare l'una sull'altra.

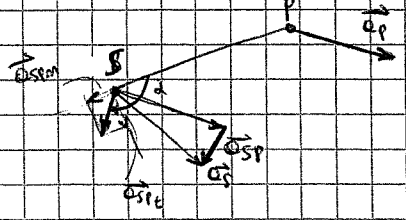


La polare mobile è la circonferenza che descrive il corpo
La polare fissa è la ruota che descrive il moto.

Accelerazione

Dati due punti S e P con a_S e a_P, l'accelerazione relativa di S rispetto a P è $\vec{a}_{SP} = \vec{a}_S - \vec{a}_P$

quindi $\vec{a}_S = \vec{a}_P + \vec{a}_{SP} = \vec{a}_P + \vec{a}_{SP_n} + \vec{a}_{SP_t}$



Teorema di Rivals

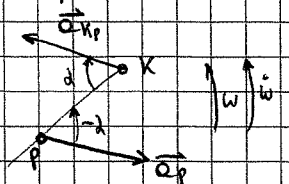
$\vec{a}_S = \vec{a}_P + \omega^2 \vec{SP} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{PS}$

Per ruolle $a_{SPt} = a_{SPn} \cdot tg(\pi - \alpha)$

$\dot{\omega} PS = \omega^2 SP \cdot tg(\pi - \alpha) = -\omega^2 SP \, tg\alpha$

$tg\alpha = -\frac{\dot{\omega} PS}{\omega^2 SP}$

Esiste un punto nel piano che ha accelerazione nulla



Se conosco il modulo di $\vec{a}_P$ e l'angolo α mi è facile trovare il punto K

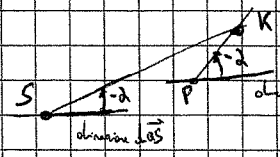
$\vec{a}_K = 0$

$\vec{a}_{KP} = \vec{a}_K - \vec{a}_P = 0 - \vec{a}_P = -\vec{a}_P$

Il punto K è chiamato centro delle accelerazioni.

Conoscendo K, il teorema di Rivals mi consente $\vec{a}_S = \omega^2 \vec{SK} + \vec{\omega} \wedge \vec{KS}$

Se invece conosco solo la direzione delle accelerazioni di due punti e l'angolo α, posso trovare K così:



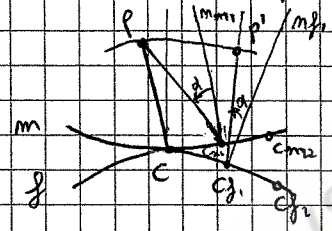
Traiettoria

Se sono note le polari posso sfruttare queste informazioni per ricavare la traiettoria di un punto.

1- le polari ruotano sempre nello stesso verso l'una sull'altra

2- la direzione della velocità è ortogonale alla congiungente il polo considerato e il vertice della polare

3- la velocità è tangente alla direzione.

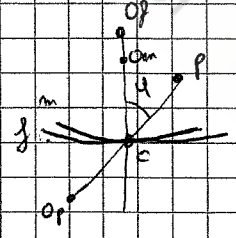


$\overline{C_m'P} = \overline{C_f'P'}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Per determinare il raggio di curvatura della traiettoria di un punto si usa la formula di Euler-Savary

$$\frac{1}{CO_f} - \frac{1}{CO_m} = \left(\frac{1}{CO_P} - \frac{1}{CP}\right)\cos\varphi$$



Se P ha traiettoria rettilinea (o si trova in un punto di flesso), chiamando F il punto P, so che $CO_F = +\infty$

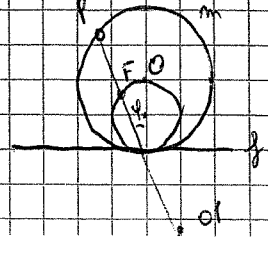
quindi $1/CO_F = 0$.

La formula di Euler-Savary diventa $\frac{1}{CO_f} - \frac{1}{CO_m} = \left(-\frac{1}{CF}\right)\cos\varphi$ quindi $CF = \left(\frac{1}{CO_m} - \frac{1}{CO_f}\right)^{-1}\cos\varphi = \Delta\cos\varphi$

tutti i punti F stanno su una circonferenza di diametro Δ, detta circonferenza dei flessi.

Se voglio trovare CO_P, inserisco la formula sopra e ottengo $\frac{1}{CO_P} - \frac{1}{CP} = -\frac{1}{CF}$ (essendo tutti allineati posso semplificare il $\cos\varphi$)

esempio: rotolamento di una ruota su una guida



$CO_f = +\infty$, $O = O_m$, $CO_m = R$ $\Rightarrow \Delta = \left(\frac{1}{CO_m} - \frac{1}{CO_f}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^{-1} = R$

$CP = 2R\cos\varphi$

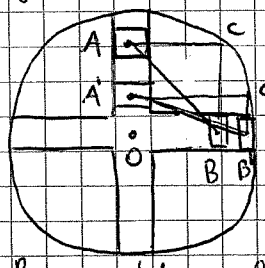
$\frac{1}{OO} - \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{CO_P} - \frac{1}{2R\cos\varphi}\right)\cos\varphi$

$-\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{\cos\varphi}{CO_P}$

$-\frac{1}{2R} = \frac{\cos\varphi}{CO_P}$

$CO_P = -2R\cos\varphi$

Ellisse a Chiave



$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ quindi avendo un attrezzo $\overline{OC} = \overline{OC'}$

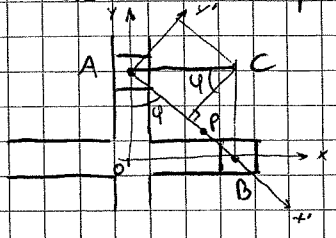
Per qualsiasi posizione del meccanismo il punto C è sempre a distanza da O pari alla lunghezza della biella AB.

La polare fissa è quella la circonferenza esterna

$A\hat{C}B$ e $A'\hat{C}'B'$ sono triangoli rettangoli con stessa ipotenusa (la biella).

In un riferimento solidale con la biella col polo C è mobile nel luogo la circonferenza di diametro OC

Possono determinare le espressioni analitiche delle due polari:



$AB = a$

riferimento xy: $\begin{cases} x_c = a \sin\varphi \\ y_c = a\cos\varphi \end{cases}$ quadrando e sommando $\quad x_c^2 = a^2\sin^2\varphi$, $\; y_c^2 = a^2\cos^2\varphi$

$$x_c^2 + y_c^2 = a^2$$

è l'equazione della polare fissa

riferimento x'y' $\quad x_c' = AC\sin\varphi = a\sin\varphi\sin\varphi = a\sin^2\varphi = a\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)$

essendo $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ BISEZIONE

$y_c' = AC\cos\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi = a\frac{\sin 2\alpha}{2}$

essendo $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ DUPLICAZIONE

Tutti i poli della biella generano traiettorie ellittiche.

quindi quadrando e sommando

$$x_c'^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a\cos^2 2\varphi}{4}$$

$$y_c'^2 = \frac{a^2}{4}\sin^2 2\varphi$$

$$\left(x_c' - \frac{a}{2}\right)^2 + y_c'^2 = \frac{a^2}{4}$$

è la polare mobile

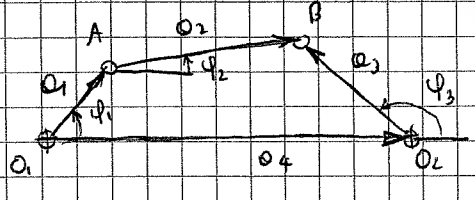
$\frac{x_P}{AP} = \frac{OB}{AB}$ e $\frac{y_P}{PB} = \frac{OA}{AB}$ sfruttando le similitudini tra i triangoli

quadrando e sommando

$$\frac{x_P^2}{AP^2} + \frac{y_P^2}{PB^2} = \frac{OB^2 + OA^2}{AB^2} = 1$$

ch è l'eq.ne di un ellisse con centro in O con semiassi le distanze del polo P da A e da B

Quadrilatero articolato



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ l'equazione vettoriale diventa

$a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 = a_3\cos\varphi_3 + a_4$

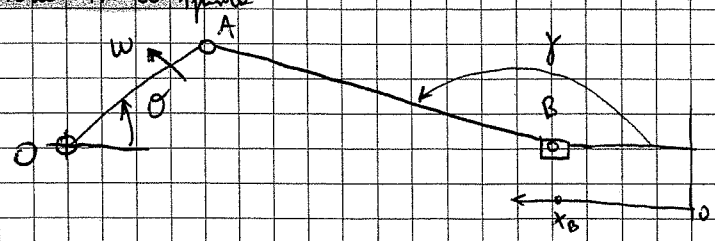
$a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2 = a_3\sin\varphi_3$

noto φ_1 posso trovare φ_2 e φ_3.

poi se devo poi trovo $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Meccanismo di spinta



$x_B = r + l - [r\cos\theta + l\cos(\pi-\gamma)] = r + l - [r\cos\theta - l\cos\gamma]$ essendo $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$

$r\sin\theta = l\sin(\pi-\gamma) = l\sin\gamma$ essendo $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$

definiamo $\lambda = \left(\text{rapporto di compressione}\right) = \frac{r}{l} = \frac{\sin\gamma}{\sin\theta}$

essendo poi $\cos\gamma = -\sqrt{1-\sin^2\gamma}$ ed segno meno perché $\gamma > 90°$ dove $\cos\gamma < 0$

$x_B = r + l - [r\cos\theta + l\sqrt{1-\sin^2\gamma}] = r + l - [r\cos\theta + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}} =$

$\cong r + l - r\cos\theta + l = r(1-\cos\theta)$

per $\lambda \to 0$

noto x_B posso determinare velocità e accelerazione

$x_B = r(1-\cos\theta)$

$v_B = r\omega\sin\theta$

$a_B = r\omega^2\cos\theta$

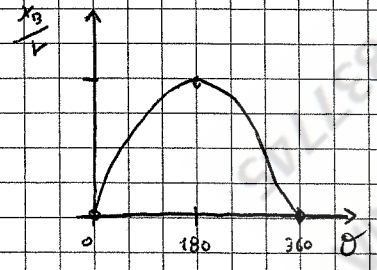
$\sin\gamma = \lambda\sin\theta$

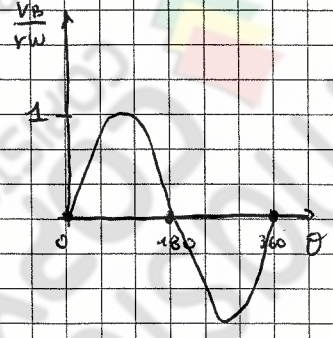
$\cos\gamma\,\dot\gamma = \lambda\cos\theta\,\dot\theta$

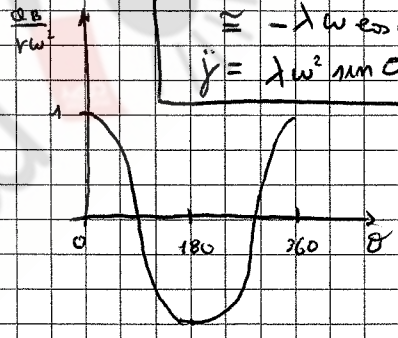
$\dot\gamma = \lambda\dot\theta\,\frac{\cos\theta}{\cos\gamma} = \dot\theta\lambda\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}\left(1-\cos 2\theta\right)-1}}$

$\cong -\lambda\omega\cos\theta$

$\ddot\gamma = \lambda\omega^2\sin\theta$

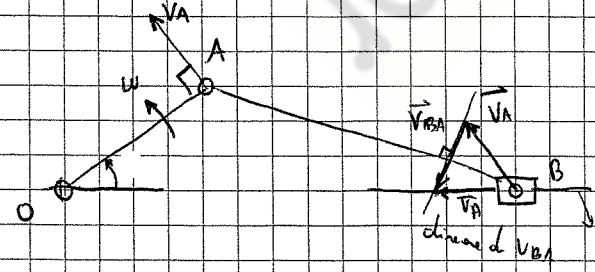






visualizzazione per via grafica:

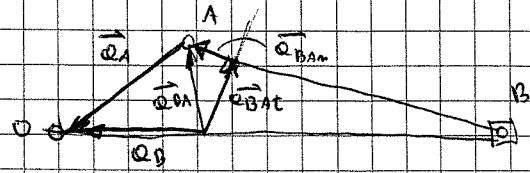
velocità



$V_{BA} = V_B - V_A$

noto V_A e note le direz. di $\vec V_{BA}$ e $\vec V_B$ come fatto

accelerazione



noto $\vec a_A$
noto le direz. di $\vec a_{BAn}$, $\vec a_{BAt}$, $\vec a_B$
poi noto direz, modulo e verso di $\vec a_{BAn}$

$a_{BAn} = \frac{V_{BA}^2}{BA}$

$\vec a_{BA} = \vec a_B - \vec a_A$